Aplicação de p-Medianas ao Problema do Corte Guilhotinado Bi-Dimensional para Peças Regulares

Gilberto Irajá Müller[1], Arthur Tórgo Gómez[1]

[1]Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS
PIPCA - Programa Interdisciplinar de Pós-Graduação em Computação Aplicada
Av. Unisinos, 950 – Bairro Cristo Rei – CEP 93022-000 – São Leopoldo – RS

irajamuller@terra.com.br, breno@unisinos.br

Abstract. *This paper presents a model applied to Guillotineable Bin-packing Problem without constraints about cutting number stages. The proposed model uses p-Median for arrangement of the parts. Experiments were realized with the aim of validating the proposed model presenting interesting results and good quality in the response time.*

Resumo. *Este artigo apresenta uma modelo aplicado ao Problema de Corte Guilhotinado Bi-dimensional sem restrições quanto ao número de estágios de corte. O modelo proposto utiliza p-Medianas para o arranjo das peças. Foram realizados experimentos com o objetivo de validar o modelo proposto apresentando resultados interessantes e de boa qualidade no tempo de resposta.*

1. Introdução

O Problema de Corte e Empacotamento tem sido estudado nas últimas décadas objetivando auxiliar diversas indústrias a minimizar a perda de matéria-prima, tais como: vidro, metal, couro, entre outros [Fritsch and Vornberger 1995]. Essas indústrias, normalmente têm seus processos de embalagem e cortes automatizados e necessitam de um Plano de Corte referente ao material utilizado de forma a minimizar o desperdício de material. O Problema de Corte e Empacotamento consiste em descobrir o melhor arranjo de um conjunto de peças de dimensões diversas em um objeto com dimensões maiores. Esse é um problema de otimização combinatória sendo classificado como NP-Hard [Garey et al. 1979].

No Brasil, uma iniciativa para associar o trabalho científico à prática industrial foi proposta por um consórcio constituído pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), Universidade de São Paulo (USP) e a Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), que iniciou um projeto para Problemas de Cortes e Empacotamento [CEAC 1999] e vem sendo amplamente pesquisados. Esse projeto tem como objetivos: desenvolver programas que resolvessem problemas industriais de natureza combinatória, achar aplicabilidade dos resultados obtidos das pesquisas e integrar pesquisadores de todo o Brasil que já desenvolviam trabalhos na área de Corte e Empacotamento.

Para o problema de corte guilhotinado, de acordo com Christofides e Hadjiconstantinou [Christofides and Hadjiconstantinou 1995], é um problema mais específico do Problema de Corte e Empacotamento e consiste em um conjunto de peças retangulares pequenas, com tamanhos diversificados e um objeto retangular principal, sendo que o objetivo é maximizar o valor de peças cortadas através do arranjo destas peças no objeto principal, sujeito à restrições quanto ao número de peças e número de estágios.

De forma a tratar o problema supracitado, é desenvolvido um modelo baseado no problema clássico de p-Medianas. Dessa forma, este trabalho possui a seguinte organização: na Seção 2 é apresentado o problema do corte guilhotinado; na Seção 3 é descrito o modelo baseado nas p-Medianas; na Seção 4, apresenta-se os experimentos e, por fim, na Seção 5, é apresentado a conclusão deste trabalho.

2. O problema do corte guilhotinado

O tipo de corte abordado neste trabalho é do tipo guilhotina e, tanto as peças como os objetos são do tipo retangular, o que se pode afirmar que o corte será do tipo ortogonal, ou seja, paralelo um dos lados do objeto principal [Christofides and Hadjiconstantinou 1995]. A Figura 1 ilustra o corte guilhotinado e o não-guilhotinado.

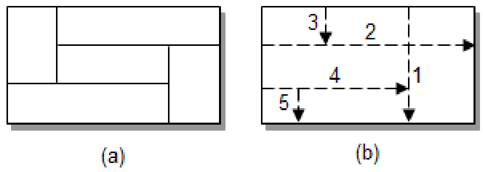

Figura 1. (a) Corte não-guilhotinado (b) Corte guilhotinado com os estágios de corte.

Neste trabalho busca-se a minimização da área de desperdício interno entre as peças: caso duas peças sejam colocadas lado a lado, ou uma em cima da outra e estas apresentarem lados adjacentes compartilhados, não haverá espaço desperdiçado entre elas e o espaço será computado como “0”. Existem algumas hipóteses em relação ao problema, sendo elas:

- A quantidade de itens de uma determinada peça terá um limite para cada plano de corte projetado e é definido como corte restrito [Daza et al. 1995];
- Os objetos deverão estar em estoque, o que significa dizer que serão suficientes para a demanda de peças a serem cortadas;
- As máquinas que irão fazer o corte deverão ser do tipo guilhotina, em que a lâmina quando faz o corte, percorre o objeto de uma extremidade a outra dividindo o objeto em duas partes;
- A medida que corresponde a espessura da lâmina no objeto não será observada neste trabalho;
- Neste modelo propõe-se o corte não estagiado, pois não há restrições quanto ao número de estágios de corte;
- Tanto as peças quanto os objetos, deverão ser representados por duas dimensões altura e largura e sua área o produto das duas dimensões;
- Assume-se para este trabalho que os valores correspondentes às dimensões terão números inteiros;
- Durante a projeção das peças ocorrerá o corte normalizado, ou seja, deverão tocar-se de forma parcial ou total [Christofides and Hadjiconstantinou 1995];
- Cada peça possui um identificador único;
- As peças podem ter dimensões homogêneas, ou seja, a mesma altura e a mesma largura;

- As peças podem girar num ângulo de 90º [Morabito and Arenales 1995];
- As dimensões do objeto são observadas como o limite;
- As peças não podem ser sobrepostas;
- A primeira peça é colocada no canto esquerdo inferior do objeto.

3. Problema das p-Medianas

P-Medianas é um problema clássico de otimização combinatória que tem como objetivo construir um conjunto de elementos em que a associação de um novo elemento ao conjunto (medianas), é feita através dos pesos entre o último elemento associado e os elementos que ainda não foram associados ao conjunto, de forma que o escolhido proporcione o melhor benefício, segundo um critério pré-determinado [Lorena and Senne 2003].

Pode-se representar o problema das p-Medianas através de um grafo em que as instalações possíveis candidatas à demanda são os vértices, a ligação entre as instalações são as arestas e o peso é um benefício entre elas. Considere $G = (V, A)$ um grafo onde V são os vértices e A as arestas: determine um conjunto de medianas Vp com cardinalidade p, de forma que o somatório dos pesos de cada vértice das demandas $V - Vp$ até seu vértice mais próximo em Vp seja minimizada [Corrêa 2000]. O conjunto de p instalações que forma uma solução são chamados de p-Medianas [Corrêa 2000].

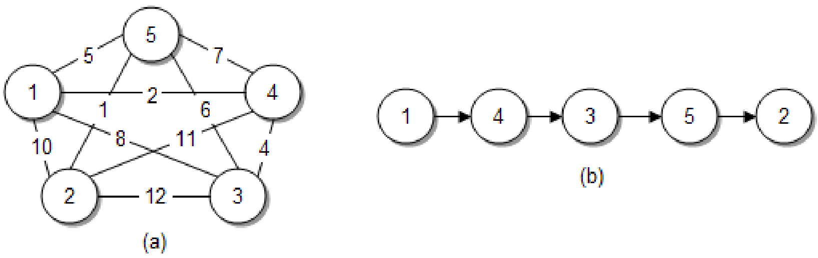

Figura 2. (a) Grafo p-Mediana (b) p-Mediana gerada após análise dos pesos.

A Figura 2(a) apresenta um grafo com um conjunto de peças onde os vértices do grafo são os identificadores das peças e os números internos nas arestas mostram o desperdício interno entre as peças. Na Figura 2(b) é apresentada a seqüência de peças após a avaliação dos pesos.

A seguir é apresentado a formulação clássica para o problema de p-Medianas, onde: n é o número total de vértices do grafo; a_i é a demanda do vértice j; d_{ij} é a distância do vértice i ao vértice j; p é o número de instalações utilizadas como medianas; $x_{ij} = 1$ se o vértice i for designado ao vértice j, $x_{ij} = 0$, caso contrário; $y_{ij} = 1$ se o vértice j for uma instalação utilizada como mediana e $y_{ij} = 0$, caso contrário.

$$min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \, d_{ij} \, x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad para \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad para\ i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = p \tag{4}$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad para\ i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos pesos dos vértices das demandas das instalações; a restrição (2) assegura que todos os vértices farão parte da mesma mediana. A restrição (3) proíbe que um vértice de demanda seja designado a uma instalação que não seja mediana e, na restrição (4), é definido o total de vértices de instalações selecionadas. Por fim, a restrição (5) garante a não-negatividade.

3.1. Modelo utilizando p-Medianas

Para o modelo com p-Medianas foi desenvolvida uma formulação para tratar o problema considerando as hipóteses supracitadas, onde: CD é a soma da área total das peças projetadas com a área total de desperdício interno; N = número total de peças; W = altura do objeto principal; L = largura do objeto principal; i = índice para a peça; l_i = altura da peça i; w_i = largura da peça i;

$$min\ Z(x) = CD - \sum_{i=1}^{N} l_i w_i; \quad l_i, w_i \in I\!N^* \tag{6}$$

$$0 \leq CD \leq WL; \quad W, L \in I\!N^* \tag{7}$$

A função objetivo (6) busca a minimização e representa a área total de desperdício interno do objeto principal. A restrição (7) assegura que a área total das peças projetadas não ultrapasse a área do objeto principal.

3.1.1. Arquitetura

A arquitetura do modelo está estruturada em três módulos que descrevem as etapas de um processo de Corte Guilhotinado Bi-Dimensional para peças Regulares. A Figura 3 ilustra a arquitetura.

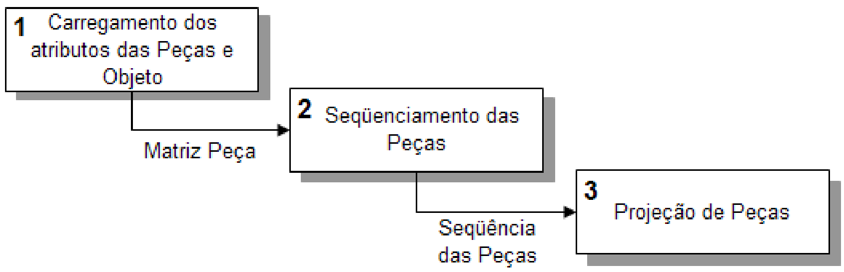

Figura 3. Arquitetura do Modelo.

No primeiro módulo é feita a leitura dos dados das dimensões das peças e dos parâmetros de entrada como quantidade de peças. No segundo modulo é feita a construção da seqüência em que as peças serão projetadas e, no terceiro módulo, é projetado as peças bem como gerado o plano de corte.

Neste modelo assume-se que as peças somente serão projetadas em um sentido: (i) ou no sentido horizontal, sendo uma peça ao lado da outra, (ii) ou no sentido vertical, uma peça em cima da outra; no módulo de seqüenciamento de peças é gerado a ordem em que as peças serão projetadas. O módulo é baseado no algoritmo de p-Mediana ilustrado no Algoritmo 1, onde as peças são projetadas no objeto segundo a avaliação de um peso que representa o melhor encaixe entre a última peça projetada e àquelas que ainda não foram projetadas.

No Módulo Projeção de peças são armazenadas as coordenadas das peças com base na seqüência e nas dimensões das peças projetadas e é gerado o plano de corte.

```
P = Conjunto de peças projetadas;
Carregar matriz de Peças A;
i = Seleciona_Peça_Maior_Area(A);
while (A ≠ ∅) do
    Atualizar P;
    menorpeso = MAXINT;
    j = 1;
    projetar = ∅;
    while (j ≤ Peças não Projetadas) do
        if menorpeso > Calcula_Peso_Peças(A, i, j) then
            projetar ← j;
            menorpeso ← Calcula_Peso_Peças(A, i, j);
        endif
        j ← j + 1;
    endw
    Projeta_Peça_no_Objeto(A, i, projetar);
    i ← projetar;
endw
Plano_Corte(P);
```

Algoritmo 1: Algoritmo p-Mediana.

O Algoritmo 1, após carregar as informações das peças e do Objeto (Módulo 1), executa o procedimento *Seleciona_peça_Maior_Area*, onde é escolhida entre todas as peças àquela que tiver a área maior calculada pelo produto da largura w_i e altura l_i.

O algoritmo objetiva a próxima peça entre as outras que não fazem parte do conjunto p de medianas e, para isso, analisa qual peça possui o melhor encaixe com a última peça colocada, ou seja, escolhe das restantes a que possuir o menor desperdício interno em relação a peça i. O procedimento (Módulo 2) percorre toda a matriz de peças a serem projetadas até que a última peça faça parte do conjunto p de medianas.

No procedimento *Calcula_Peso_peças* é determinado o peso que representa o desperdício interno entre as peças, analisando as dimensões das duas peças (i,j) e qual o melhor arranjo entre elas.

O procedimento *Projeta_peça_no_Objeto*, em que após terem sido avaliados os pesos e escolhida a seqüência das peças anteriormente (Módulo 2), é feita a projeção das peças no objeto observando os limites das dimensões deste. A primeira peça é colocada no canto esquerdo inferior, a segunda a sua direita e assim sucessivamente, formando "tiras" de peças até o limite lateral. Caso a peça não caiba nessa tira, passa a ser a primeira peça da tira superior seguinte, até que todas as peças sejam projetas ou o limite superior do objeto seja alcançado.

À medida em que as peças são encaixadas no objeto, suas coordenadas são armazenadas. A altura de uma tira de peças corresponde a maior altura das peças projetadas em uma tira de peças e a largura da tira corresponde a soma das larguras das peças já projetadas nela. Neste procedimento as coordenadas são armazenadas tendo como referência a base da tira, a altura e largura da peça. O primeiro estágio do corte é paralelo à largura do objeto e corta primeiro uma tira, o outro estágio paralelo à altura do objeto e mais um corte caso exista diferença nas dimensões das peças. Por fim, o procedimento *Plano_Corte* visualiza o plano de corte gerado através do módulo 3.

4. Experimentos

De modo a validar o seqüenciamento e plano de corte, utilizamos o cenário proposto por Oliveira e Ferreira [Oliveira and Ferreira 1990] ilustrado na Tabela 1.

Tabela 1. Cenário de Validação.

Peça	Altura	Largura
1	18	22
2	29	8
3	19	19
4	13	16
5	29	8
6	16	4
7	13	16
8	18	22
9	19	19
10	29	8

A primeira peça a fazer parte do conjunto das medianas(peças projetadas), será a que tiver a maior área. As próximas peças serão determinadas pela menor área de desperdício (peso). A cada peça colocada no objeto principal são analisadas as peças restantes buscando-se a peça com o menor desperdício interno. As peças são colocadas uma ao lado da outra representando tiras. Quando o limite lateral não permitir que uma nova peça seja colocada, é iniciada outra tira de peças. Após formar a seqüência de peças, são armazenadas as coordenadas de cada corte que pertence ao Plano de Corte.

Na Figura 4 é apresentada a matriz de pesos após a construção da p-Mediana com a seqüência de projeção das peças representada na linha da matriz bem como o seu par representado pela flecha. A função objetivo foi de 312 com um tempo de execução de 0,01 segundos.

	Peças									
Ordem p-Mediana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X	242	22	26	242	8	26	0	22	242
8	X	242	22	26	242	8	26	X	22	242
6	X	52	12	0	52	X	0	X	12	52
4	X	169	39	X	169	X	0	X	39	169
7	X	169	39	X	169	X	X	X	39	169
3	X	190	X	X	190	X	X	X	0	190
9	X	190	X	X	190	X	X	X	X	190
2	X	X	X	X	0	X	X	X	X	0
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0

Figura 4. Matriz de pesos após aplicação do Modelo p-Medianas.

Na Figura 5 é ilustrado o plano de corte após a execução do modelo com p-Medianas em que o primeiro corte separa o objeto em duas tiras de peças, e os próximos cortes separam as demais peças. Pode-se observar que a seqüência que representa o conjunto das peças projetadas é P={1,8,6,4,7,3,9,2,5,10}.

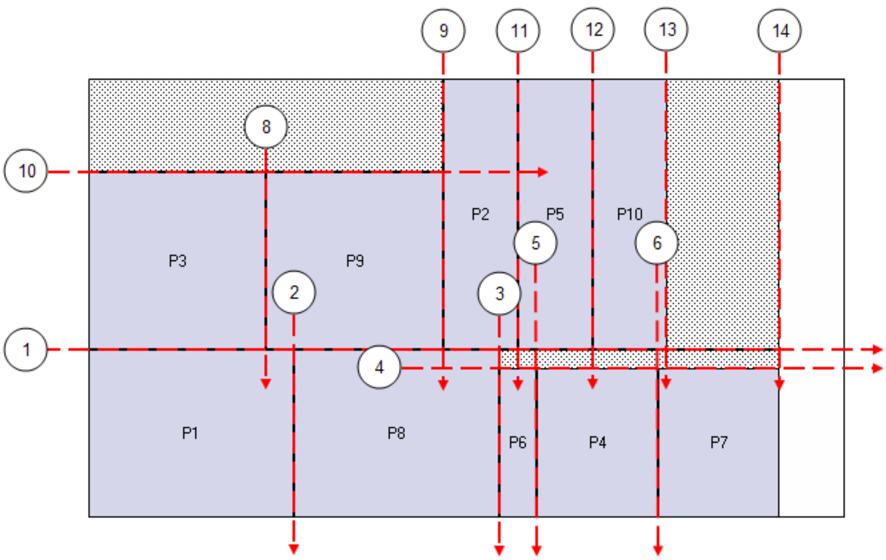

Figura 5. Plano de corte.

Na Tabela 2 é apresentado um comparativo entre os resultados obtidos por Daza [Daza et al. 1995] referente a oito problemas.

Tabela 2. Abordagem proposta por Daza et al. x p-Mediana

	Cenário(N)	Desperdício (Daza et al.)	Desperdício p-Mediana	%	tempo (seg)
p1	16	0	7	100,00	0,01
p2	41	59	108	83,05	0,06
p3	23	43	70	62,79	0,01
p4	24	31	50	61,29	0,01
p5	9	0	4	100,00	0,01
p6	27	0	15	100,00	0,01
p7	24	8	20	150,00	0,01
p8	25	34	72	111,76	0,01

O modelo p-Mediana apresentou boas respostas em virtude da avaliação com as peças restantes a cada iteração do algoritmo, ou seja, pela simplicidade dessa heurística e por não possuir uma geração de vizinhança complexa, é extremamente rápido e possui boa qualidade no tempo de resposta. Porém, os resultados dos experimentos não atingiram o desperdício interno obtido pelos cenários escolhidos na literatura conforme ilustrado na Tabela 2 em que sofreram variações de 61,59% a 150,00%. Um dos motivos que pode se observado é que o conceito clássico das p-Medianas permite que a próxima peça a ser projetada seja sempre avaliada com a última peça projetada e não pelo conjunto já projetado.

5. Conclusões

Este trabalho apresentou a aplicação de p-Medianas ao problema do corte guilhotinado. Foi apresentado um modelo que permite gerar eficientemente uma proposta de plano de corte onde é aplicado o conceito de p-Medianas. Comparando-se o modelo p-Mediana em que são implementados o mesmo conjunto de problemas, o modelo gerou resultados com áreas de desperdícios maiores do que o abordado por [Daza et al. 1995], pois o algoritmo de p-Mediana avalia a última peça colocada no conjunto com a próxima a ser considerada, enquanto o algoritmo proposto por [Daza et al. 1995] avalia o conjunto das peças já projetadas com a próxima da seqüência através de um mecanismo de geração de vizinhança que permite diversificar e intensificar a solução.

A restrição das p-Medianas faz com que as próximas peças sejam colocadas uma ao lado da outra, caso contrário, haveria muita fragmentação de desperdício interno. Como extensão futura deste trabalho, sugere-se o aprimoramento dos métodos de p-Mediana de forma a considerar todo o conjunto de peças projetadas através de um mecanismo mais eficiente de geração de vizinhança.

Referências

CEAC (1999). Cortes e empacotamento assistidos por computador. `http://www.lac.inpe.br/po/projects/ceac/ceac.html`. Acesso em 12 dez 2006.

Christofides, N. and Hadjiconstantinou, E. (1995). An Exact Algorithm for Orthogonal 2D Cutting Problems using Guillotine Cuts. *European Journal of Operational Research*, 83:21–38.

Corrêa, E. S. (2000). Algoritmos Genéticos e Busca Tabu Aplicados ao Problema das p-Medianas. *Universidade Federal do Paraná, Dissertação de Mestrado*.

Daza, V. P., Alvarenga, A. G., and Diego, J. (1995). Exact Solutions for constrained two-dimensional cutting problem. *European Journal of Operational Research*, 84:633–644.

Fritsch, A. and Vornberger, O. (1995). *Cutting Stock by Iterated Matching*. Universität Osnabrück.

Garey, M. R., Johnson, D. S., and Sethi, R. (1979). *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. New York; Oxford: Freeman.

Lorena, L. A. N. and Senne, E. L. F. (2003). Abordagens Complementares para Problemas de p-Medianas. *Revista Produção*, 13(3):78–87.

Morabito, R. and Arenales, M. (1995). An and/Or-Graph approach to the solution of two dimension non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research*, 84:599–617.

Oliveira, J. and Ferreira, J. (1990). An improved version of Wang´s Algorithm for two-dimensional cutting problems. *European Journal of Operational Research*, 44:256–266.